Espaces vectoriels réels

ESPACES VECTORIELS

Définition d'un espace vectoriel

- ***I - Définition d'un espace vectoriel***

  I-1) Définition

  E est un **espace vectoriel réel (e. v. r.),** s'il est muni de *deux lois de composition* :

- **une loi de composition interne**, notée (+), appelée **addition des vecteurs**, qui fait de ***E*** un *groupe commutatif* , c'est-à-dire, pour les éléments **x**, **y** et **z** de ***E*** :
  - *EV1* : l'addition est ***associative*** : $x + (y + z) = (x + y) + z$
  - *EV2* : l'addition est ***commutative*** : $x + y = y + x$.
  - *EV3* : l'addition possède ***un élément neutre***, noté 0_E :

  $x + 0_E = x$, 0_E est un élément de E
  - *EV4* : tout élément x de ***E*** possède un ***symétrique*** pour l'addition, noté $-x$: $x + (-x) = 0_E$

ESPACES VECTORIELS
Définition d'un espace vectoriel

- **une loi de composition externe,** appelée **multiplication par les réels (λ et μ)**, possédant, les propriétés suivantes :

  - EV5 : la multiplication par les réels est ***distributive par rapport à l'addition*** des nombres réels :

  $(\lambda + \mu).x = \lambda . x + \mu . x$

  - EV6 : la multiplication par les réels est ***distributive par rapport à l'addition*** des vecteurs (éléments de E) :

  $\lambda . (x + y) = \lambda . x + \lambda . y$

  EV7 : la multiplication par les réels est ***associative*** :

  $(\lambda . \mu) . x = \lambda . (\mu . x)$

  EV8 : la multiplication par le réel **1** est ***neutre*** :

  $1 . x = x$

ESPACES VECTORIELS
Définition d'un espace vectoriel

I-2) Exemples

1 – $\Re$, muni de l'addition est un **e. v. r.** :

EV1 $1 + (8 + (-4)) = 1 + 4 = 5$; $(1 + 8) + (-4)) = 9 + (-4) = 5$

EV3 $1 + 0 = 1$

EV4 $1 + (-1)) = 0$

EV2 $1 + 5 = 5 + 1 = 6$

EV5 $(2 + 3) . 5 = 2 . 5 + 3 . 5 = 25$

EV6 $4 . (5 + 7) = 4 . 5 + 4 . 7 = 48$

EV7 $(2 . 3) . 5 = 2 . (3 . 5) = 30$

EV8 $1 . 5 = 5$

ESPACES VECTORIELS
Définition d'un espace vectoriel

2 – $P_n[x]$, polynôme de degré inférieur ou égale à n, muni de l'addition est un **e. v. r.** :

EV1 $P(x) + (Q(x) + R(x)) = (P(x) + (Q(x)) + R(x) = S(x)$ ($\in P_n[x]$)

EV3 $P(x) + 0 = P(x)$ ($\in P_n[x]$)

EV4 $P(x) + (-P(x)) = 0$ ($\in P_n[x]$)

EV2 $P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$ ($\in P_n[x]$)

EV5 $(\lambda + \mu) . Q(x) = \lambda . Q(x) + \mu . Q(x) = S(x)$ ($\in P_n[x]$)

; λ *et* $\mu \in \Re$

EV6 $\lambda . (P(x) + (Q(x)) = \lambda . P(x) + \lambda . Q(x) = S(x)$ ($\in P_n[x]$)

EV7 $(\lambda . \mu) . P(x) = \lambda . (\mu . P(x)) = S(x)$ ($\in P_n[x]$)

EV8 $1 . P(x) = P(x)$

ESPACES VECTORIELS
Définition d'un espace vectoriel

3 – Autres exemples

- $\Re$, muni de l'addition est un e. v. r.

- $\Re^n = \{ (x_1, \ldots, x_n) / x_1 \in \Re, \ldots, x_n \in \mathbf{R} \}$,
muni de la somme :

$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$

et de la multiplication par les réels :

$\lambda . (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda . x_1, \ldots, \lambda . x_n)$

- $\mathcal{A}$ (D, $\Re$), l'ensemble des applications de D dans R
muni des deux lois :

(f + g)(x) = f(x) + g(x) pour tout x dans D

(λ . f)(x) = λ . f(x) pour tout x dans D

ESPACES VECTORIELS

Définition d'un espace vectoriel

- ***I-3) Proposition***

$\forall\ \lambda \in \Re$ et $\mathbf{u} \in \boldsymbol{E}$, on a :

1– $\lambda \cdot 0_E = 0_E$ et $0 \cdot \mathbf{u} = 0_E$

2– $\lambda \cdot \mathbf{u} = 0_E \Rightarrow . \ \{\lambda = 0$ ou $\mathbf{u} = 0_E\}$

3– $(-\lambda) \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot (-\mathbf{u}) = -(\lambda \cdot \mathbf{u}) = = -\lambda \cdot \mathbf{u}$

ESPACES VECTORIELS

Sous espace vectoriel

- ***II - Sous espace vectoriel***

II-1) Définition

Une partie $\boldsymbol{F}$ d'un e.v.r. $\boldsymbol{E}$ ($\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{E}$) est un **sous espace vectoriel réel s. e. v. r.** de $\boldsymbol{E}$ si et seulement si les *conditions* suivantes sont vérifiées :

1) $\boldsymbol{F} \neq \varnothing$;

*F est un ensemble **non vide***

2) $\forall\ \mathbf{v}$ et $\mathbf{w} \in \boldsymbol{F}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \boldsymbol{F}$;

F est une partie ***stable*** pour l'addition des vecteurs

3) $\forall\ \mathbf{v} \in \boldsymbol{F}$ et $\forall\ \lambda$ dans $\Re$, $\lambda . \mathbf{v} \in \boldsymbol{F}$;

F est une partie ***stable*** pour la multiplication par les réels.

ESPACES VECTORIELS
Sous espace vectoriel

- ***II-2) Propriété et corollaire***

- **Propriété**

  Une partie **F** d'un **e. v. r. E** est un **sous espace vectoriel réel** de **E** si et seulement si **F** muni de l'addition de **E** et de la multiplication par les réels est un **e. v. r.**

- **corollaire**

  Une partie **F** d'un **e. v. r. E** est un **sous espace vectoriel réel** de E si et seulement si :

$$\forall\ \mathbf{u} \text{ et } \mathbf{v} \in \mathbf{F},\ \forall\ \lambda \text{ et } \mu \in \mathrm{R}\ \ \lambda\,.\,\mathbf{u} + \mu\,.\,\mathbf{v} \in \mathbf{F}.$$

ESPACES VECTORIELS
Sous espace vectoriel

- **Remarques**

  Pour montrer qu'une partie **F** d'un **e. v. r. E** est un **s. e. v. r.** de **E** il faut :

  - Vérifier d'abord que **F** est une partie **non vide** de E

  - Utiliser ensuite la **définition** ou le **Corollaire**

- ***III - Système générateur***

III-1) Combinaison linéaire

III-1-a) définition

Soit $\{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_p}\}$ une famille de p vecteurs d'un **e. v. r.** **E**, une combinaison linéaire des p vecteurs $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_p}$ est **un** vecteur **u** de **E** s'écrivant :

$$u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_p u_p$$

avec $\lambda_i \in \Re$ pour tout $1 \leq i \leq p$

III-1-b) Proposition

L'ensemble de toutes ces combinaisons linéaires est appelé **s. e. v. r. engendré** par les vecteurs $\mathbf{u_i}$, i=1..p, qu'on note:

$$F = < \mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_p} > \text{ ou } F = vect(\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_p})$$

Système générateur

III-1-c) Sous espace vectoriel engendré par $\{u_1, \dots, u_p\}$

Étant donné p vecteurs $\mathbf{u_1, \dots, u_p}$ d'un e. v. r. ***E***, L'ensemble F définie par :

$$F = \left\{ v \in E \;/\; v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i \,,\; \lambda_i \in \Re \right\}$$

est un sous espace vectoriel de ***E*** appelé **s. e. v. r.** engendré par les vecteurs u_i, i=1..p.

Système générateur

Démonstration

- **F** n'est pas une partie vide car $\mathbf{0_E} \in F$:

  $\mathbf{0_E} = 0 \,.\, \mathbf{u_1} + \dots + 0 \,.\, \mathbf{u_p}$
- ***F*** est un sous espace vectoriel de ***E*** :

  - Si **u** et **v** appartiennent à F alors

  $\mathbf{u} = \lambda_1.u_1 + \dots + \lambda_p.u_p$ et $\mathbf{v} = \mu_1.u_1 + \dots + \mu_p.u_p$

  $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (\lambda_1 + \mu_1).\mathbf{u_1} + \dots + (\lambda_p + \mu_p).\mathbf{u_p}$

  Par conséquent $\mathbf{w} \in F$

  Si $\mathbf{u} \in F$ et $\mu \in$ R, alors

  $\mu \,.\, \mathbf{u} = \mu(\lambda_1.\mathbf{u_1} + \dots + \lambda_p \,.\, \mathbf{u_p})$

  $\mu \,.\, \mathbf{u} = \mu\lambda_1.\mathbf{u_1} + \dots + \mu\lambda_p \,.\mathbf{u_p}$

  Par conséquent $\mu \,.\, \mathbf{u} \in F$

ESPACES VECTORIELS

Système générateur

III-1-d) Exemple

Soit ***F*** un **s. e. v. r.** engendré par les vecteurs **(x, y, z)** de $\Re^3$, tells que : **x + y + z = 0.** Montrer que ***F*** est engendré par les vecteurs **(0, 1, -1)** et **(1, 0, -1).**

$$\forall u \in F\ \exists \lambda_1\ et\ \lambda_2 \in \Re /$$

$$u = \lambda_1 (1,0,-1) + \lambda_2 (0,1,-1)$$

$$u = (\lambda_1, \lambda_2, -(\lambda_1 + \lambda_2))$$

$$u = (x,y,z) = (x,y,-(x+y)) = (\lambda_1, \lambda_2, -(\lambda_1 + \lambda_2))$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = x\ et\ \lambda_2 = y$$

$$\forall u \in F\ \exists x\ et\ y \in \Re /$$

$$u = (x,y,z) = (x,y,-(x+y)) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1)$$

ESPACES VECTORIELS

Système générateur

III-2) Parties génératrices

III-2-a) définition-1

Soit une famille de **p** vecteurs $\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_p}$ d'un **e. v. r.** ***E***, $\{ \mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_p} \}$ est une **partie génératrice** de ***E*** si et seulement si :

$$E = < u_1, \dots, u_p >$$

III-2-a) définition-2

$\{u_1,\dots,u_p\}$ est une **partie génératrice** de ***E*** si et seulement si : $\forall\ \mathbf{u} \in E, \exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_p \in R$ tel que : $\mathbf{u} = \lambda_1 . \mathbf{u_1} + \dots + \lambda_p . \mathbf{u_p}$

ESPACES VECTORIELS

Dépendance et indépendance linéaire

- *IV – Dépendance et indépendance linéaire*

IV-1) Famille ou partie libre

IV-1-a) définition

Une famille p vecteurs $\mathbf{u_1}$, …, $\mathbf{u_p}$ d'un e. v. r. ***E***, soit { u_1,…,u_p }, est **une partie libre de *E*** si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0_E \Rightarrow \lambda_i = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq p$$

On dit alors que les vecteurs $\mathbf{u_1}$, …, $\mathbf{u_p}$ sont **linéairement indépendants.** Et la partie { u_1,…,u_p } est dite **libre**

IV-1-b) Propriété

Toute partie extraite d'une partie libre de E est une partie libre de E.

ESPACES VECTORIELS

Dépendance et indépendance linéaire

IV-2) Famille ou partie liée

IV-2-a) définition

Une famille p vecteurs $\mathbf{u_1}$, …, $\mathbf{u_p}$ d'un e. v. r. ***E***, soit { u_1,…,u_p }, est **une partie liée de *E*** si elle n'est pas libre; c.à.d. $\exists$ $\boldsymbol{\lambda i \neq 0}$.

On dit alors que les vecteurs $\mathbf{u_1}$, …, $\mathbf{u_p}$ sont **linéairement dépendants.**

IV-2-b) Propriété

Si l'un des vecteurs $\mathbf{u_i}$ est **nul** alors { u_1,…,u_p }, est **une partie liée de *E***.

Dépendance et indépendance linéaire

IV-2-c) proposition

Une Famille $\{u_1,\ldots,u_p\}$, est **une partie liée de *E*** si et seulement si l'un au moins des vecteurs $\mathbf{u_i}$ est **une combinaison linéaire des autres.**

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0_E \Rightarrow \exists \lambda_j \neq 0 \Rightarrow u_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} u_i$$

IV-3 exemples

IV-3-a) exemple 1

On montre que {(1,0), (0,1)} est une partie génératrice de R^2.

En effet, il suffit de remarquer que pour avoir :

$u = \lambda. (1,0) + \mu. (0,1) = (0,0)$

Il faut que $\lambda = \mu = 0$

Dépendance et indépendance linéaire

IV- 3-b) exemple 2

{(1,0,0), (1,1,1), (-1,-2,-2)} est une partie liée.

En effet,

$\lambda_1. (1,0,0) + \lambda_2. (1,1,1) + \lambda_3. (-1,-2,-2) = (0,0,0)$ est satisfait pour tout triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \alpha\ (-1,2,1)$

En effet : (-1,-2,-2) = 1. (1,0,0) - 2. (1,1,1).

ESPACES VECTORIELS

Base

V Bases

V-1) Dimension d'un e. v. r.

Un e. v. r. est dit de dimension finie s'il existe une partie génératrice de **E** contenant un nombre fini de vecteurs.

Exemple

$E = R^2$ est un e. v. r. de dimension finie : dim (E) = 2

$R^2 = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle$; dim $(R^2) = 2$

ESPACES VECTORIELS

Base

V-2-a) Définition-1

Une famille de vecteurs $\{ e_1, \ldots, e_n \}$ d'un **e. v. r.** , de **dimension finie n**, une **base** de ***E*** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- 1 Les vecteurs e_i **, i=1…n, sont linéairement indépendants**, La famille $\{ e_1, \ldots, e_n \}$ est libre.
- 2 Les vecteurs e_i **, i=1…n, engendrent E**, La famille $\{ e_1, \ldots, e_n \}$ est génératrice.

ESPACES VECTORIELS

Base

IV-2-a) Définition-2

Étant donné un **e. v. r.** de **dimension finie n**, une **base** de ***E*** est un ensemble constitué de **n vecteurs** de E, { $\mathbf{e_1}$, …, $\mathbf{e_n}$ } tel que tout vecteur **u** de **E** s'écrive d'une façon **unique** sous la forme :

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Les λ_i sont les **composantes** du vecteur **u** relativement à la base { $\mathbf{e_1}$, …, $\mathbf{e_n}$ }.

ESPACES VECTORIELS

Base

V-3) Propriété caractéristique

{ $\mathbf{e_1}$, …, $\mathbf{e_n}$ } est **une base** de **E** si et seulement si { $\mathbf{e_1}$, …, $\mathbf{e_n}$ } est une **partie génératrice libre** de E.

démonstration :

- Supposons que { $\mathbf{e_1}$, …, $\mathbf{e_n}$ } soit une base de **E**. C'est donc une partie génératrice de E. Montrons qu'elle est libre.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{e}_i = 0_{\mathrm{E}} = 0.\mathrm{e}_1 + \ldots + 0.\mathrm{e}_n$$

La décomposition étant unique, les λ_i sont tous nuls.

ESPACES VECTORIELS

Base

V-4) Unicité de la décomposition

Réciproquement, supposons que { $\mathbf{e}_1$, …, $\mathbf{e}_n$ } soit une partie génératrice libre de E.

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Soit $u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$ une autre décomposition de u.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0_E$$

Comme { $\mathbf{e}_1$, …, $\mathbf{e}_n$ } est une partie libre, $\lambda_i = \mu_i$ pour $1 \le i \le n$

Il s'ensuit que **u** s'écrit donc d'une façon unique :

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

et { e_1,…,e_n } est une base de E.

ESPACES VECTORIELS

Base

V-5) Détermination pratique d'une base

- Comment montrer qu'une partie { e_1,…,e_n } d'un espace vectoriel E est une base ?

  - 1) On ne connaît pas la dimension de E.
  On utilise alors soit la définition soit la propriété caractéristique.

  2) On connaît la dimension n de E.
  On montre alors que { $\mathbf{e}_1$, …, $\mathbf{e}_n$ } est une partie libre.

ESPACES VECTORIELS
Base

V-6) Corollaire

Dans un espace vectoriel de dimension n :

- Toute famille de plus de n éléments est liée.
- Toute famille de moins de n éléments ne peut être génératrice.
- Toute famille libre de n éléments forme une base.
- Toute famille génératrice de n éléments forme une base.

ESPACES VECTORIELS
Norme et produit scalaire

VI) Norme

VI-1) Définition

On appelle norme d'un vecteur **u** l'application de l'espace vectoriel ***E*** dans $\Re^+$, notée N(**u**), qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- $N(\mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}_E$
- $N(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq N(\mathbf{u}) + N(\mathbf{v})$
- $N(\lambda.\mathbf{u}) = |\lambda|.N(\mathbf{u})$

VI-2) Norme euclidien

$$u = \left(n_1, n_1, \ldots, n_p\right) \rightarrow N(u) = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} n_i^2}$$

VII) Produit scalaire

VII-1) Définition

Soient deux vecteurs **u** et **v** , d'un e. v. r. **E,** définis par :

u = $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ et **v** = $(m_1, m_2, \ldots, m_p)$

On appelle produit scalaire de deux vecteurs **u** et **v**, noté $\langle \mathbf{u},\mathbf{v} \rangle$, le nombre :

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v} \rangle = n_1.m_1 + n_2.m_2 + \ldots + n_p.m_p$$